

$\Delta R/R$ und $\Delta\theta$, die jedoch im allgemeinen nur von sekundärem Interesse sind.

2. Schließlich ist aus Tab. 1 noch zu ersehen, daß trotz der relativ großen Werte von $\Delta R/R$ und $\Delta\theta$ mit den Reflexen bei $124,0_5^\circ$ und $161,8_7^\circ$ eine für die meisten Fälle völlig ausreichende Genauigkeit von $\Delta a/a$

¹ H. EBEL, Z. Angew. Physik **16**, 490 [1964].

$<10^{-4}$ erzielt wird und sich so die doch eher zeitraubende Prozedur, wie sie hier beschrieben wurde, erübrig. Das Auswerteverfahren wird sich also dann anbieten, wenn entweder nur Reflexe bei kleineren Glanzwinkeln gut vermeßbar sind oder aber besonders hohe Anforderungen an die Genauigkeit gestellt werden.

² H. EBEL et al., Z. Angew. Physik **32**, 291 [1971].

Isotherme galvanomagnetische Transportkoeffizienten bei Streuung quasifreier Ladungsträger an Dipolen

J. RACHMANN

Forschungslaboratorien der Siemens AG, München
Deutschland

(Z. Naturforsch. **27 a**, 876–878 [1972]; eingegangen am 10. Februar 1972)

Isothermic Galvanomagnetic Transport Coefficients of Quasi-Free Carriers Scattered at Dipole Centres

It has been observed that in several semiconductors an increase in total impurity concentration leads to an increase in the low-temperature mobility due to pairing effects. The transport coefficients r_H , r_ϱ' and r_ϱ necessary for the analysis of the Hall effect and the magnetoresistance, in the event of dipole scattering, are derived for the cases $k a \gg 3$ and $k a \ll 3$ (k =wave number of the quasi-free charge carrier, a =dipole length). For $k a \gg 3$ the coefficients are dependent on temperature, effective mass, and dipole length, whereas for $k a \ll 3$ they are constant.

Im Jahre 1956 wurde von REISS, FULLER und MORIN¹ eine Erhöhung der Tieftemperaturbeweglichkeit bei Ga-dotiertem Germanium nach Eindiffusion von Li festgestellt. Sie deuteten diesen Effekt als Verminderung des wirklichen Streuquerschnittes der Ga-Störstellen durch die eindiffundierten Li-Atome infolge Paarbildung. Außer bei Elementhalbleitern kann eine erhöhte Beweglichkeit infolge Paarbildung mit Dipolwirkung auch bei Verbindungshalbleitern, wie z. B. den III–V-Verbindungen, auftreten. Eine quantitative Auswertung der gemessenen Temperaturlängen der Hall-Beweglichkeit $\mu_H(T)$ ist nur mit Kenntnis des Hall-Faktors $r_H(T)$ bei Dipolstreuung möglich. Ferner wird für Untersuchungen der magnetischen Widerstandsänderung der entsprechende Koeffizient $r_\varrho'(T)$ benötigt.

Auf eine im thermischen Gleichgewicht befindliche Probe wirke in Längsrichtung ein primäres elektrisches Feld, senkrecht dazu stehe die magnetische Induktion. Dann ergibt sich für einen nichtentarteten Halbleiter mit parabolischer Bandstruktur im Zentrum der Brillouin-Zone unter der Voraussetzung $(\mu_H B_z)^2 \ll 1$:

Hall-Konstante

$$R_H = \frac{r_H}{e} \cdot \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{(\mu_p p + \mu_n n)^2} \approx -\frac{r_H}{e n}, \quad (1)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. J. RACHMANN, Siemens AG, Zentrale Forschung und Entwicklung, FL 41, D-8000 München 80, Postfach 80 17 09.

magnetische Widerstandsänderung

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{\varrho(B) - \varrho(0)}{\varrho(B)} = \left[r_\varrho' \frac{\mu_n^3 n + \mu_p^3 p}{\mu_n n + \mu_p p} - r_H^2 \left(\frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{\mu_n n + \mu_p p} \right)^2 \right] B_z^2 \approx r_\varrho (\mu_H B_z)^2. \quad (2)$$

Die Ausdrücke bei ambipolarer Leitung vereinfachen sich bei z. B. überwiegender Elektronenleitung wie in den Näherungen angegeben (entsprechend bei überwiegender Löcherleitung). Gesucht sind die von den über die Bänder gemittelten Relaxationszeiten τ der Trägergase abhängigen Koeffizienten

$$r_H \equiv \mu_H / \mu = R_H / \mu \varrho(0) = \langle \tau^2 \rangle / \langle \tau \rangle^2 \quad (3)$$

$$\text{und} \quad r_\varrho' = \langle \tau^3 \rangle / \langle \tau \rangle^3. \quad (4)$$

Die Leitfähigkeits- oder Driftbeweglichkeit ist in Gl. (3) mit μ bezeichnet. Im Falle eines überwiegenden Leitungsmechanismus benutzt man statt Gl. (4) in Gl. (2) besser

$$r_\varrho \equiv \frac{\Delta \varrho}{\varrho (\mu_H B_z)^2} = \left(\frac{r_\varrho'}{r_H^2} - 1 \right). \quad (5)$$

Die Mittelung der v -ten Potenz der Relaxationszeit gibt das Integral

$$\langle \tau^v \rangle = \frac{4}{3 \pi^{1/2}} \int_0^\infty \tau^v(\eta) \eta^{3/2} e^{-\eta} d\eta, \quad (6)$$

wobei $\eta = E/k_0 T$ die reduzierte Energie eines Ladungsträgers bedeutet.

Das übliche Vorgehen bei der Berechnung der Relaxationszeit bei Streuung von Ladungsträgern an Störstellen soll hier kurz skizziert werden (ausführlichere Darstellung siehe z. B. für einzelne ionisierte Coulomb-sche Störstellen in ^{2–5}): Aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung erhält man die Streuamplitude in 1. Bornscher Näherung der vom Streupotential auslaufenden Welle. Der differentielle Streuquerschnitt ergibt sich als Betrag des Quadrates der Streuamplitude.

Bei einem Dipolpotential $V(\mathbf{r}) \sim e^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} / \epsilon r^3$ folgt nach Mittelung über den Winkel zwischen Dipolvektor \mathbf{a} und Differenz der Wellenzahlvektoren $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ sowie Integration über den Raumwinkel der totale Streuquerschnitt, der im Falle der vorausgesetzten elastischen Streuung gleich dem elastischen Streuquerschnitt ist (e =Elementarladung, ϵ =Dielektrizitätskonstante, \mathbf{r} =Ortsvektor). Die reziproke Relaxationszeit τ^{-1} ist dann durch das Produkt von Zahl der Streuzentren pro Volumen, thermischer Geschwindigkeit der La-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

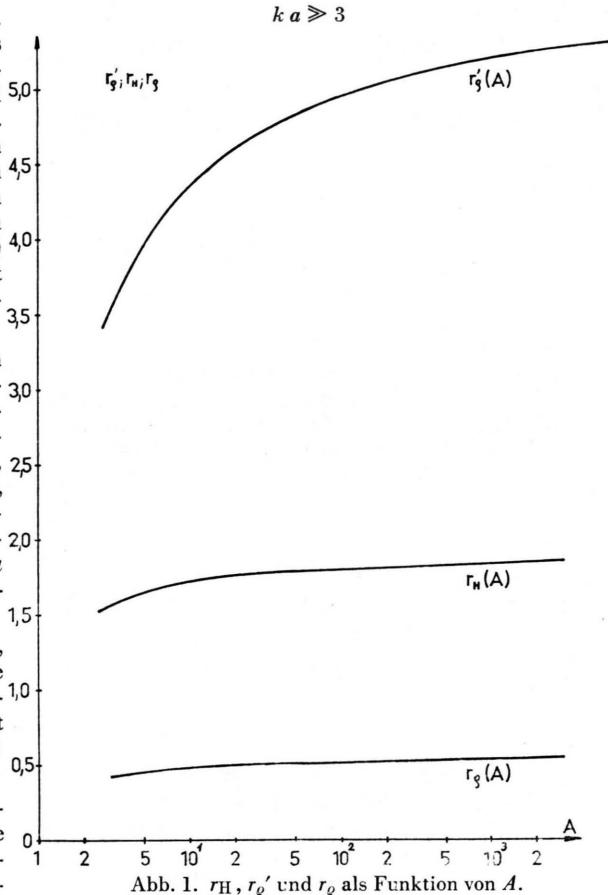
On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

dungsträger und elastischem Streuquerschnitt gegeben. Die Integration (6) über $\tau(\eta)$ mit $\nu=1$ ergibt mittels $\langle\tau\rangle \cdot e/m^* = \mu$ die Driftbeweglichkeit, bzw. nach Multiplikation mit dem Hall-Faktor r_H die experimentell leichter zugängliche Hall-Beweglichkeit μ_H . Von APPEL und TEUTSCH⁶ wurden die Ausdrücke für τ und μ im Prinzip auf dem hier genannten Wege für Streuung an allen Richtungen im Halbleitervolumen orientierten Dipolen erhalten. In Tab. 1 sind diese Beziehungen in der Spalte $k a \ll 3$ (k = Wellenzahl des Ladungsträgers) eingetragen. Außer der Abhängigkeit $\mu \sim T^{1/2}/N_D$ mit N_D = Zahl der Dipole pro Volumen ist der starke Einfluß der Dipollänge mit $\mu \sim a^{-2}$ bemerkenswert.

Von TSERTSVADZE⁷ wurde τ und μ für ein System von $2 N_D$ sich gegenseitig kompensierender Coulomb-scher Störstellen, welche gleichmäßig im Halbleiter verteilt sind, berechnet. Die Dipollänge ergibt sich in diesem Falle zu $a_0 = (3/8 \pi N_D)^{1/3}$. Die Wahrscheinlichkeit, für ein gegebenes Störstellenatom bei r ein anderes, zwischen $r + dr$ liegendes, zu treffen, ist durch die Poisson-Verteilung gegeben. Die Mittelung über den Streuquerschnitt mit dieser Verteilung liefert für τ und μ als zusätzlichen Faktor die Γ -Funktion $\Gamma(s)$ im Nenner.

Die Grenzfälle $k a \gg 3$ bzw. $k a \ll 3$ ergeben sich, indem man im Fall $k a \ll 3$ bei dem als Potenzreihe darstellbaren Streuquerschnitt nur das erste Glied berücksichtigt und im Fall $k a \gg 3$ den Streuquerschnitt näherungsweise $\sim \ln(2 a k)$ setzt [s. hierfür Gl. (22) und (24) in⁷].

Ist die Bedingung $k a \gg 3$ noch erfüllt ohne die Annahme einer gleichmäßigen Störstellenverteilung wie in⁷, so erhält man die in Tab. 1 eingetragenen Beziehungen mit einem Wert A , der im Falle einer gleich-



Tab. 1. Relaxationszeit und Driftbeweglichkeit bei Dipolstreuung.

$k a \ll 3$		$k a \gg 3$	
τ	μ	τ	μ
$\frac{3 \cdot 2^{3/2} \pi (\varepsilon \varepsilon_0)^2 \hbar^2 (k_0 T)^{1/2} \eta^{1/2}}{e^4 m^{*1/2} a^2 N_D}$	$\frac{2^{9/2} \pi^{1/2} (\varepsilon \varepsilon_0)^2 \hbar^2 (k_0 T)^{1/2}}{e^3 m^{*3/2} a^2 N_D}$	$\frac{2^{5/2} \pi m^{*1/2} (\varepsilon \varepsilon_0)^2 (k_0 T)^{3/2} \eta^{3/2}}{e^4 N_D \ln(A \eta^{1/2})}$	$\frac{2^{11/2} \pi^{1/2} (\varepsilon \varepsilon_0)^2 (k_0 T)^{3/2}}{e^3 m^{*1/2} N_D \ln(A \sqrt[3]{3})}$

$$A = \frac{e(c-1) 2 a (2 m^* k_0 T)^{1/2}}{\hbar}$$

Tab. 2. Galvanomagnetische Transportkoeffizienten.

$k a \ll 3$		$k a \gg 3$	
r_H	$\frac{45 \pi}{128} \approx 1,1045$	$\frac{315 \pi [\ln(A \sqrt[3]{3})]^2}{512 [\ln(A \sqrt[9]{2})]^2}; \lim_{A \rightarrow \infty} r_H \approx 1,93$	
r_{ϱ}'	$\frac{27 \pi}{64} \approx 1,3254$	$\frac{15 \pi [\ln(A \sqrt[3]{3})]^3}{8 [\ln(A \sqrt[6]{6})]^3}; \lim_{A \rightarrow \infty} r_{\varrho}' \approx 5,89$	
r_{ϱ}	$\frac{256}{75 \pi} - 1 \approx 0,08650$	$\frac{32768 [\ln(A \sqrt[9]{2})]^4}{6615 \pi [\ln(A \sqrt[3]{3})] [\ln(A \sqrt[6]{6})]^3} - 1; \lim_{A \rightarrow \infty} r_{\varrho} \approx 0,57$	

mäßigen Verteilung durch A' zu ersetzen ist:

$$\begin{aligned} A'/A &= (2/3)^{1/3} e^{(1-c)} a_0/a = 4 a_0/3 a; \\ c &\approx 0,5772 \quad (\text{Eulersche Konstante}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Funktionen r_H , r_{ϱ}' und r_{ϱ} [Gln. (3), (4) und (5)] müssen die Integrale (6) mit den in Tab. 1 angegebenen Relaxationszeiten berechnet werden. Dabei braucht nicht zwischen den Fällen a_0 und $a \neq a_0$ unterschieden zu werden.

Die Integrale (6) können ohne Schwierigkeit für $k a \ll 3$ gelöst werden. Bei $k a \gg 3$ erfolgte die Berechnung mit einem Hewlett-Packard-Computer 9100 B. In Tab. 2 sind für letzteren Fall Näherungsformeln angegeben.

Für kleine Dipollängen sind die isothermen galvanomagnetischen Transportkoeffizienten konstant. Im anderen Grenzfall werden sie über A von der Temperatur, der effektiven Masse und der Dipollänge abhängig. In Abb. 1 sind hierfür $r_H(A)$, $r_{\varrho}'(A)$ und $r_{\varrho}(A)$ dargestellt.

¹ H. REISS, C. S. FULLER u. F. J. MORIN, Bell Syst. Techn. J. **35**, 535 [1956].

² E. M. CONWELL u. V. WEISSKOPF, Phys. Rev. **77**, 388 [1950].

³ H. BROOKS, Phys. Rev. **83**, 879 [1954].

⁴ P. P. DEBYE u. E. M. CONWELL, Phys. Rev. **93**, 693 [1954].

⁵ R. B. DINGLE, Phil. Mag. **46**, 831 [1955].

Abschließend soll noch ein Vergleich der Transportkoeffizienten bei Dipolstreuung mit denen bei anderen Streuprozessen erfolgen. Während bei Streuung an akustisch unpolarisierten Phononen das Verhältnis $(r_H \text{ ak. unpol.}/r_H \text{ Dipol})_{ka \ll 3} = 16/15 \approx 1,07$ wird, ist bei der magnetischen Widerstandsänderung der Phononenprozeß um einen Faktor $(r_{\varrho} \text{ ak. unpol.}/r_{\varrho} \text{ Dipol})_{ka \ll 3} \approx 3 \approx 3,16$ größer. Nach DELVES⁸ ist für optisch polarisierte Phononen der Hall-Faktor bei $T = \Theta$ (Θ = Debye-Temperatur) $\approx 1,10$ und entspricht damit etwa demjenigen für Dipolstreuung bei $ka \ll 3$. Der von MANSFIELD⁹ berechnete Hall-Faktor bei Streuung an nicht gepaarten ionisierten Störstellen hat einen ähnlichen Verlauf wie der bei Dipolstreuung für $ka \gg 3$ in Abb. 1 dargestellte. Er unterscheidet sich durch eine andere Variable $A_I = 8 m^* \varepsilon \varepsilon_0 (k_B T)^2 \eta^{1/2} / e^2 \hbar^2 n$, strebt aber für sehr große A_I demselben Grenzwert $(r_H \text{ Dipol})_{ka \gg 3} \approx 1,93$ zu.

⁶ J. APPEL u. W. B. TEUTSCH, J. Phys. Chem. Solids **23**, 1521 [1962].

⁷ A. A. TSERTSVADZE, Fiz. Tekhn. Poluprovodnikov **3**, 409 [1969].

⁸ R. T. DELVES, Proc. Phys. Soc. **73**, 572 [1959].

⁹ R. MANSFIELD, Proc. Phys. Soc. B **69**, 862 [1956].

Experimenteller Nachweis stationärer Inversionen atomarer Niveaus in einem expandierenden Wasserstoff-Plasma

P. HOFFMANN und W. L. BOHN

DFVLR-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. **27 a**, 878—880 [1972]; eingegangen am 27. Januar 1972)

Experimental Evidence for Stationary Population Inversions of Atomic Levels in an Expanding Hydrogen Plasma

Detailed calculations of population densities of excited levels in a decaying hydrogen plasma flow predict population inversions within a definite range of plasma parameters. This has been verified experimentally in a rapid expanding plasma where the characteristic time of decay was much shorter than the relaxation time of the ground state. Population inversions have been found for the first transitions of the Paschen and Brackett series.

Die Erzeugung von Besetzungsinvolutionen zwischen zwei angeregten Energieniveaus mit Hilfe gasdynamischer Methoden ist erstmals von HURLE und HERTZBERG¹ vorgeschlagen worden und hat in den letzten Jahren zu den Erfolgen des gasdynamischen Lasers geführt. Der Grundgedanke besteht darin, die für die Inversion erforderliche Überbesetzung des oberen Energieniveaus bzw. Unterbesetzung des unteren Energie-

Sonderdruckanforderungen an Dipl.-Phys. W. L. Bohn, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt eV, Institut für Plasmadynamik, D-7000 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 38—40.

niveaus durch schnelle Änderung des thermischen Zustandes des entsprechenden Gases zu erzielen. Dabei muß die Zustandsänderung in Zeiten vollzogen werden, die vergleichbar oder kleiner sind als die Relaxationszeit der betreffenden Niveaus. Diese auf molekulare Gasströmungen mit großem Erfolg angewandte Methode ist bislang im Bereich atomarer Gasströmungen erfolglos geblieben, denn die Relaxationszeiten der Energieniveaus von Atomen sind so kurz ($\approx 10^{-7}$ sec), daß die Forderungen an eine die Besetzungsichte „einfrierende“ schnelle Expansion experimentell nur schwierig erfüllt werden können. Eine solche dynamische Methode stellt jedoch die Ausgangsbasis für die Entwicklung eines plasmadynamischen Lasers dar, wenn es gelingt, gemessen an der experimentellen Realisierbarkeit günstigere Kriterien für das Auftreten von Involutionen in Plasmen zu finden. Ein plasmadynamischer Laser verspricht eine größere relative Leistungssteigerung im Vergleich mit konventionellen Systemen, als der gasdynamische Molekül-Laser. Bei letzterem ist nämlich die strömungsmechanisch abzuführende Verlustenergie kleiner als bei atomaren oder Ionen-Lasern.

Eine umfassende Untersuchung des Verhaltens von Quantenniveaus der Atome bzw. Ionen in einem zerfallenden, strömenden Plasma liefert neue Kriterien für die Erzeugung von Involutionen, wobei der Relaxationszeit des Grundzustandes entscheidende Bedeutung zukommt. Wie an anderer Stelle gezeigt worden ist², ergeben sich aus dieser Theorie feste Plasmaparameterbereiche, in denen Involutionen auftreten. Sie werden dann erreicht, wenn bei geeigneter Temperatur und